

## EKSTREMITET S TIJESNOM OBUJMICOM: TEORETSKI MODEL

Željko Šomodi, Emilija Zdraveva, Željka Pavlović  
Sveučilište u Zagrebu Tekstilno-tehnološki fakultet

E-mail: zeljko.somodi@ttf.hr

Original Scientific Paper

UDK: [646.4+685.3+615.468]:616-001.35-047.58

### Sažetak

Dijelovi tijela katkad su komprimirani tijesnom odjećom, obućom, zavojima i slično. Pritom je važno uravnotežiti funkcionalnost i udobnost te izbjeći negativan utjecaj na zdravlje. Za analizu pritiska uslijed tijesne navlake treba uzeti u obzir mehanička svojstva same navlake, kao i tkiva. Teorija debelostjene cijevi prilagođena je za slučaj kompozitnog cilindra s krutom jezgrom, kao približnog modela ruke ili noge, primjenom odgovarajućih rubnih uvjeta. Rezultati upućuju na utjecaj pripijenosti i elastičnih svojstava tkiva i obujmice na razinu i karakter naprezanja u tkivu.

### Ključne riječi

tijesna odjeća i obuća, naprezanje u tkivu, debelostjena cijev

### Uvod

Kompresijsko djelovanje na tijelo pojavljuje se kao posljedica tijesnih dijelova odjeće ili obuće, ili ostalih nosivih elemenata opreme ili uređaja, kao, primjerice, remenje i slično. Primjene su česte u medicinskoj terapiji (kompresijski zavoj), sportskoj odjeći i opremi ili su estetske prirode [1, 2]. Pokazuje se da je za pravilnu primjenu kompresijskih zavoja potrebno poznavati geometriju dijela tijela te deformacijska svojstva zavoja i tkiva [3]. U nekim se studijama, ponajviše namijenjenima medicinsko terapijskim primjenama, razmatra mogućnost višeslojne izvedbe za ostvarivanje ciljanog pritiska [4, 5]. Utjecaj promjenljive zakrivljenosti tjelesne površine na pritisak koji proizvodi kompresijska odjeća te mogući zahvati radi ostvarenja željene ravnomjerne raspodjele pritiska, analiziraju se u radu [6].

Ovaj rad posvećen je pregledu osnovnih alata poznatih u mehanici čijom se primjenom mogu analizirati slučajevi kad su dijelovi tijela izloženi kompresijskom djelovanju tijesno pripijene odjeće, remena, zavoja ili slično. Kao inicijalna motivacija pojavila se deformacija potkoljenice izazvana tijesnim ojačanim elastičnim rubom čarape, slika 1. Navedeni problem deformacije opisan je u radu [7] Šomodija i suradnika te se ovaj rad nastavlja na autorova prijašnja istraživanja.

Sličan učinak pojavljuje se uslijed tijesno pripijenog remena kao dijela odjeće ili obuće. Želimo li analizirati prijelaznu fazu deformiranja od trenutka navlačenja do konačne uspostave ravnotežnog deformiranog stanja,

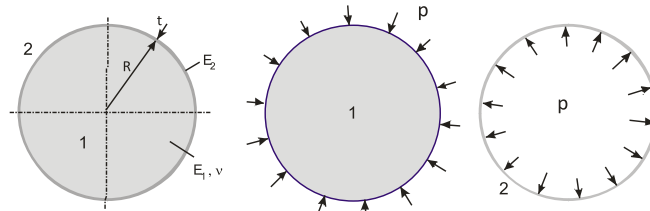


Slika 1. Deformacija potkoljenice tijesnim rubom čarape

u obzir bi trebalo uzeti viskoelastično (prigušno) ponašanje tkiva, što će se ovdje zanemariti smatrajući bitnim samo konačno ravnotežno stanje. Stoga će se razmatranja ograničiti na jednostavan linearno elastičan model deformacijskog ponašanja materijala.

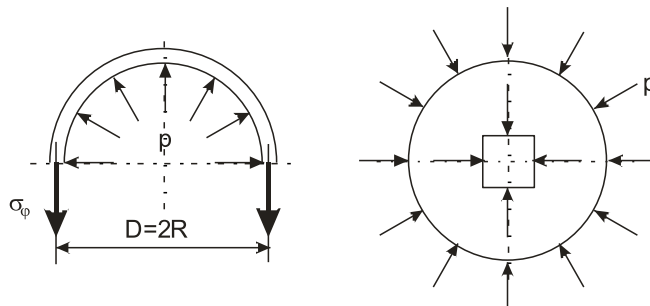
### Homogeni cilindar s tijesnom elastičnom navlakom

Najprije ćemo razmotriti uvodni slučaj homogenog elastičnog valjka na koji se navlači tijesno pripijena tankostjena elastična cijev. Na slici 2 prikazan je presjek valjka 1 na koji se navlači cijev 2. U početnom nedeformiranom stanju polumjer tanke cijevi manji je od polumjera valjka za zadani početni preklap  $\Delta R$ , koji ovdje možemo shvatiti kao pripijenost.



Slika 2. Sklop valjka i tijesno navučene tankostjene cijevi

Nakon navlačenja cijev i valjak uslijed preklopa međusobno djeluju pritiskom  $p$ . Veličina tog pritiska slijedi iz uvjeta da smanjenje polumjera valjka i povećanje polumjera cijevi zajedno nadoknade početni preklap  $\Delta R$ . Stanje naprezanja u valjku odgovara jednolikom dvoosnom pritisku  $\sigma_1 = \sigma_2 = -p$ , dok u cijevi vlada cirkularno naprezanje  $\sigma_\varphi = pR/t$ , slika 3.



Slika 3. Stanje naprezanja u cijevi i valjku

Primjenom Hookeova zakona slijede deformacije valjka i cijevi:

$$\Delta R_1 = \frac{pR}{E_1} (1 - \nu) , \Delta R_2 = \frac{pR^2}{tE_2} \quad (1)$$

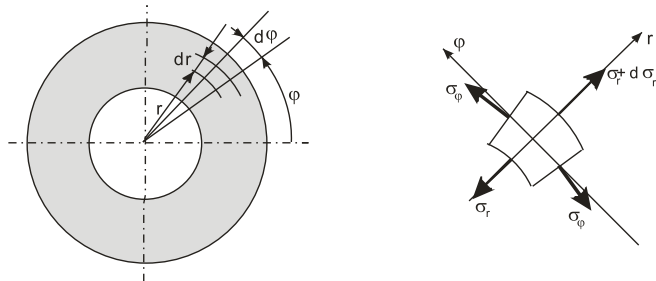
Iz spomenutog uvjeta deformacije sad slijedi pritisak u sklopu cijevi i valjka:

$$\Delta R_1 + \Delta R_2 = \Delta R \Rightarrow p = \frac{\Delta R}{\frac{R}{E_1(1-\nu)} + \frac{R^2}{tE_2}} \quad (2)$$

U slučaju nehomogenog, primjerice, kompozitnog valjka, kao i valjka s krutom jezgrom ili središnjom šupljinom, situacija postaje složenija utoliko što u presjeku valjka naprezanje više nije konstantno. Za slučaj rotacijske simetrije (npr. sklop koncentričnih cijevi) analiza se može provesti uz primjenu teorije debelostjenih cijevi.

### Osnove teorije debelostjenih cijevi

Teorija debelih cijevi ubraja se u standardne sadržaje više nauke o čvrstoći [8]. Zahvaljujući rotacijskoj simetriji u geometriji (područje interesa ovičeno dvjema koncentričnim kružnicama), kao i opterećenju (jednoliki unutarnji ili vanjski površinski pritisak), prikladno je primijeniti polarne koordinate (slika 4), a naprezanja i pomaci ovise samo o radijalnoj koordinati  $r$ . Statički uvjet slijedi iz ravnoteže sila na diferencijalnom elementu, slika 4.



Slika 4. Presjek debele cijevi u polarnim koordinatama i naprezanja na elementu cijevi

Jednadžba ravnoteže sila u pravcu osi  $r$  glasi:

$$-\sigma_r \cdot r d\varphi + (\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)d\varphi - \sigma_\varphi \cdot dr \sin \frac{d\varphi}{2} \cdot 2 = 0 \quad (3)$$

Sinus diferencijalno maloga kuta približno je jednak samom kutu pa ova jednadžba, nakon zanemarivanja male veličine višeg reda, postaje:

$$(\sigma_r - \sigma_\varphi)dr + r d\sigma_r = 0 \quad (4)$$

Geometrijsko razmatranje deformiranog stanja daje izraze za relativne deformacije u radijalnom i obodnom pravcu u ovisnosti o radijalnom pomaku  $u(r)$ :

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r} \quad (5)$$

Hookeov zakon daje vezu naprezanja i deformacija pri linearno elastičnom deformiranju:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\varphi), \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{E}(\sigma_\varphi - \nu\sigma_r) \quad (6)$$

Kad se sustav jednadžbi (4, 5, 6) riješi po nepoznatim komponentama naprezanja, rješenje se dobiva u obliku (detalje rješavanja ovdje ispuštamo):

$$\sigma_r = C_1 + \frac{C_2}{r^2}, \quad \sigma_\varphi = C_1 - \frac{C_2}{r^2} \quad (7)$$

Konstante  $C_1$  i  $C_2$  slijede iz uvjeta na unutarnjem i vanjskom rubu cijevi, gdje radijalno naprezanje odgovara opterećenju zadanim pritiskom.

Kao tipični primjer razmotrimo debelu cijev opterećenu unutarnjim pritiskom  $p$ , čiji su unutarnji i vanjski polumjer  $R_1 = R$ ,  $R_2 = 2R$ . Prva jednadžba (7) na unutarnjem i vanjskom rubu daje uvjete

$$-p = C_1 + \frac{C_2}{R^2}, \quad 0 = C_1 + \frac{C_2}{4R^2} \quad (8)$$

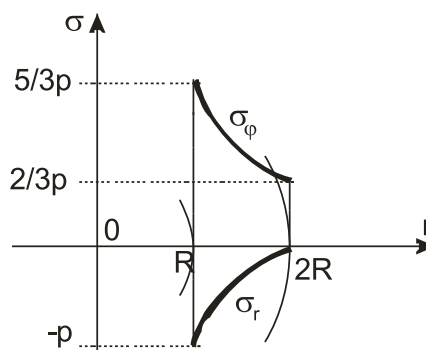
Rješenja sustava (8) dobivaju se u obliku:

$$C_1 = \frac{1}{3}p, \quad C_2 = -\frac{4}{3}pR^2 \quad (9)$$

Konačno slijede izrazi za radijalno i cirkularno naprezanje:

$$\sigma_r = \frac{p}{3}\left(1 - 4\frac{R^2}{r^2}\right), \quad \sigma_\varphi = \frac{p}{3}\left(1 + 4\frac{R^2}{r^2}\right) \quad (10)$$

Ovi izrazi predstavljaju raspodjelu radijalne i obodne komponente naprezanja po presjeku cijevi. Raspodjela je prikazana na slici 5. Obodno je naprezanje vlačno (pozitivno), dok je radijalno naprezanje negativno, tj. tlačno. Najveća vrijednost pojedine komponente naprezanja obodno je naprezanje na unutarnjem rubu presjeka cijevi, koje iznosi  $\sigma_{\max} = 5/3 p$ .



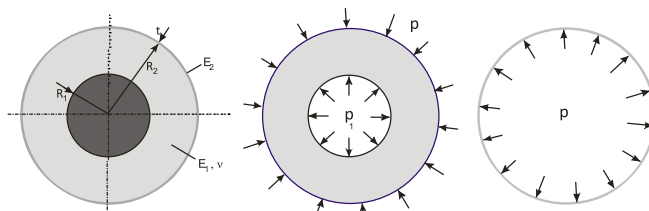
Slika 5. Raspodjela obodnog i radijalnog naprezanja u slučaju opterećenja cijevi unutarnjim pritiskom

Prikazana se teorija upotrebljava kao osnova za analize u tehničkim primjenama kao što su, primjerice, cijev vatrenog oružja opterećena unutarnjim pritiskom pri opaljenju te stezni spoj ostvaren tijesnim navlačenjem glavine na vratilo.

Ovdje se razmatra mogućnost primjene prikazane teorije debelih cijevi na slučaj elastičnog cilindra s krutom jezgrom, koji se može promatrati kao približni model ekstremiteta opterećenog vanjskim pritiskom uslijed tijesno pripijenih dijelova odjeće, obuće i slično.

### Cilindar s krutom jezgrom komprimiran tijesnom navlakom

Radi jednostavnosti modelirat ćemo presjek ekstremiteta kao kompozitni cilindar sastavljen od krute jezgre (kost) i elastičnog vanjskog sloja, koji obuhvaća mišićno, tetivno i masno tkivo i kožu. Neka se i ovdje pojavljuje vanjski pritisak uslijed tijesno navučene pripijene tanke cijevi.



Slika 6. Sklop cilindra s krutom jezgrom i tijesne tanke cijevi (lijevo), pritisci na elastični dio cilindra i na cijev

U sklopljenom stanju pojavljuju se pritisak između cilindra i tanke cijevi kao ranije te pritisak  $p_1$  (slika 6) na unutarnjem rubu cilindra uslijed otpora jezgre.

Premda zasad pritisci  $p$  i  $p_1$  još nisu poznati, rubni uvjeti na debeloj cijevi – mekom tkivu su

$$\sigma_r(R_2) = -p \quad , \quad \sigma_r(R_1) = -p_1 \quad (9)$$

Također moraju biti ispunjeni uvjeti deformacija: na unutarnjem rubu zbog otpora krute jezgre radijalni je pomak jednak nuli, a na vanjskom rubu, kao i ranije radijalni pomak i proširenje tanke pripijene cijevi zajedno odgovaraju početnom preklopu  $\Delta R$ :

$$u(R_1) = 0 \quad , \quad -u(R_2) + \Delta R_{cijev 2} = \Delta R \quad (10)$$

Na temelju jednadžbi (5, 6, 7) radijalni pomak  $u(r)$  može se izraziti u obliku

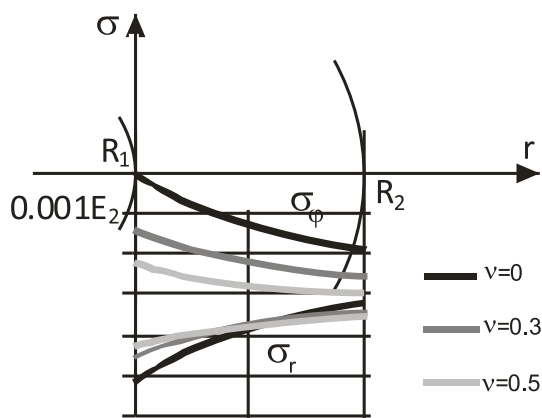
$$u = \frac{r}{E_1} \left[ C_1(1 - \nu) - \frac{C_2(1 + \nu)}{r^2} \right] \quad (11)$$

Konačno iz jednadžbi (9, 10, 11) nakon izvoda, koji prepuštamo čitateljima, slijedi izraz za pritisak  $p$ :

$$p = \frac{\Delta R}{\frac{R_2^2}{E_2 t} + \frac{R_2}{E_1} \left[ \frac{1 - \nu}{1 + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \frac{1 - \nu}{1 + \nu}} - \frac{1 + \nu}{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \frac{1 + \nu}{1 - \nu} + 1} \right]} \quad (12)$$

Ovo ćemo poglavlje zaključiti ilustrativnim primjerom. Neka su zadani Youngov modul  $E_2$  i polumjer  $R_2$ , a ostali su parametri izraženi u ovisnosti o njima kako slijedi:  $E_1 = 0,05E_2$ ,  $R_1 = 0,5R_2$ ,  $t = 0,02R_2$ ,  $\Delta R = 0,2R_2$ . Promatrat ćemo tri slučaja s tri različite moguće vrijednosti Poissonova faktora: a)  $\nu = 0$ , b)  $\nu = 0,3$ , c)  $\nu = 0,5$ . Vrijednosti pritiska  $p$  izračunate primjenom formule (12) jesu: a)  $p = 0,0032258 E_2$ , b)  $p = 0,0033753 E_2$ , c)  $p = 0,0035135 E_2$ . Izračun pomaka pokazuje da u ovom slučaju oko 80...88 % početnog preklopa pokriva deformacija cijevi 2, dok ostatak otpada na deformaciju tkiva. Konačno, određene su radijalna i obodna komponenta naprezanja u presjeku tkiva, što je prikazano dijagramom na slici 7.

Naprezanja su tlačna. Zamjetno je kako su radijalna naprezanja po iznosu redovito veća od obodnih naprezanja. Pritom je ta razlika izraženija u tkivu blizu kosti, dok je u površinskim dijelovima tkiva stanje naprezanja bliskije jednolikom dvoosnom pritisku. S porastom Poissonova faktora, razlike među obodnim i radijalnim naprezanjem u elastičnom se dijelu cilindra smanjuju, kao i s porastom radijalne koordinate  $r$ . Zanimljivo je kako pri  $\nu = 0$  obodno naprezanje neposredno uz kost iščezava, što je vezano s uvjetom da je na tome mjestu radijalni pomak jednak nuli.



Slika 7. Raspodjele naprezanja u rezultatima numeričkog primjera

## Zaključak

Naprezanja u tkivu izazvana tijesno pripijenim dijelovima odjeće ili obuće i slično, mogu se približno orijentacijski analizirati primjenom prikazanih mehaničkih modela. Primjer cilindra s krutom jezgrom zahtijeva primjenu rubnih uvjeta koji, za razliku od uobičajenih primjena teorije debele cijevi, obuhvaćaju pomake, a ne samo naprezanja. U ilustrativnom primjeru razabire se tipična raspodjela naprezanja u tkivu, kao i utjecaj Poissonova faktora na tu raspodjelu. U svrhu realističnijeg opisa situacije gdje pritisak djeluje uslijed tijesno pripijenog tekstilnog dijela odjeće (npr. čarapa), umjesto linearno elastičnog ponašanja tanke cijevi može se uzeti prikladna aproksimacija nelinearnog vlačnog ponašanja tekstilnog materijala, čime bi model postao neznatno složeniji. Model homogenog mekog tkiva može se također zamijeniti naprednijim modelom koji bi uzeo u obzir različita deformacijska svojstva, primjerice, mišićnog tkiva i masnog potkožnog sloja. Pritom bi, ako bi geometrijska distribucija pojedinih tipova tkiva zadržala osno simetrični karakter, umjesto homogene cijevi kao model mekog tkiva mogao biti primijenjen sklop dviju koncentričnih homogenih cijevi različitih svojstava  $E$  i  $\nu$ . Konačno, u slučaju da se poznati raspored tkiva različitih svojstava po presjeku ekstremiteta ne može svesti na osno simetrični model, bilo bi nužno primijeniti zahtjevnije numeričko modeliranje, primjerice, metodom konačnih elemenata.

## Literatura

- [1] MacRae, B. A.; Cotter, J. D.; Laing, R. M. 2011. Compression Garments and Exercise, *Garment Considerations, Physiology and Performance. Sports Medicine* 41, 10, 1 – 29.
  - [2] Xiong, Y.; Tao, X. 2018. Compression Garments for Medical Therapy and Sports. *Polymers* 10, 6, 663.
  - [3] Chattopadhyay, R.; Bera, M. 2017. Prediction of Pressure due to Elastic Fabric Tube Following Energy Principle. *Journal of Textile Engineering and Fashion Technology* 2, 5, 00075.
  - [4] Thomas, S. 2002. The use of the Laplace equation in the calculation of sub-bandage pressure. *World Wide Wounds* 3, 1, 21 – 23.
  - [5] Sikka, M. P.; Ghosh, S.; Mukhopadhyay, A. 2016. Mathematical modeling to predict the sub-bandage pressure on a conical limb for multi-layer bandaging. *Medical Engineering & Physics* 38, 9, 917 – 921.
  - [6] Kowalski, K.; Mielicka, E.; Kowalski, T. M. 2012. Modelling and Designing Compression Garments with Unit Pressure Assumed for Body Circumferences of a Variable Curvature Radius. *Fibres & Textiles in Eastern Europe* 206 A, 95, 98 – 102.
  - [7] Šomodi, Ž.; Pavlović, Ž.; Zdraveva, E.; Vrljićak, Z. 2019. An Introductory Computational Deformational Model of Limb-Sock Interaction. *Book of Proceedings – 12<sup>th</sup> International Scientific-Professional Symposium Textile Science & Economy 2019 French-Croatian Forum*. Novak, I. (ur.). University of Zagreb Faculty of Textile Technology. Zagreb, 123 – 130.
- Alfirević, I. 1975. *Viša nauka o čvrstoći I*. Sveučilišna naklada Liber. Zagreb.